

Банк заданий вступительного испытания в магистратуру

Базовая часть

Задание № 1 экзаменационного билета (8 баллов)

Тема 1 Характеристики линейных динамических звеньев и систем

Задание 1.1

Построить асимптотическую ЛАЧХ для системы с передаточной функцией:

- 1) $W(p) = \frac{10(1+p)}{(1+5p)(1+0,1p)}$,
- 2) $W(p) = \frac{10(1+3p)}{p^2+2p+1}$,
- 3) $W(p) = \frac{10p(1+p)}{(1+2p)(1+0,5p)^2}$,
- 4) $W(p) = \frac{100(1+p)}{(1+3p)(1+2p)}$,
- 5) $W(p) = \frac{1000(1+p)}{p(1+10p)(1+0,1p)}$.

Тема 2 Устойчивость линейных непрерывных систем автоматического управления

Задание 1.2

С помощью критерия Гурвица исследовать, при каких значениях коэффициента усиления K замкнутая система является устойчивой, если передаточная функция разомкнутой системы имеет вид:

- 1) $W_p(p) = \frac{K(1+T_4p)}{(1+T_1p)(1+T_2p)(1+T_3p)}$, $T_1 = 0,1$, $T_2 = 0,5$, $T_3 = 1$, $T_4 = 0,01$;
- 2) $W_p(p) = \frac{K}{(p^2+2p+1)(1+p)}$;
- 3) $W_p(p) = \frac{K(1+p)}{p^2(1+2p)}$;
- 4) $W_p(p) = \frac{K}{p(1+T_1p)(1+T_2p)}$, $T_1 = 1$, $T_2 = 0,1$;
- 5) $W_p(p) = \frac{K(1+T_2p)}{p(1+p)(1+T_1p)}$, $T_1 = 0,1$, $T_2 = 0,5$.

Пример выполнения задания 1.1

Построить асимптотическую ЛАЧХ для системы с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{K(1+T_2 p)^2}{p(1+T_1 p)(1+T_3 p)^2}, \quad K=100, \quad T_1=2, \quad T_2=0,5, \quad T_3=0,02.$$

Решение:

Для построения асимптотической ЛАЧХ перейдем к комплексному коэффициенту усиления, произведя в передаточной функции замену $p = j\omega$:

$$W(j\omega) = \frac{K(1+j\omega T_2)^2}{j\omega(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_3)^2}.$$

Запишем выражение для модуля комплексного коэффициента усиления системы:

$$A(\omega) = \frac{K \left(\sqrt{1+\omega^2 T_2^2} \right)^2}{\omega \sqrt{1+\omega^2 T_1^2} \left(\sqrt{1+\omega^2 T_3^2} \right)^2}.$$

Запишем выражение для точной ЛАЧХ – $L(\omega)$:

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg \omega - 20 \lg \sqrt{1+(\omega T_1)^2} + 40 \lg \sqrt{1+(\omega T_2)^2} - 40 \lg \sqrt{1+(\omega T_3)^2}.$$

Для построения асимптотической ЛАЧХ $\bar{L}(\omega)$ весь диапазон частот каждого выражения под знаком радикала разбиваем на два интервала, сопрягаемых на частотах $\omega_i = 1/T_i$, и пренебрегаем на них меньшим из величин слагаемым суммы.

Запишем частоты сопряжения в порядке их возрастания:

$$\omega_1 = 1/T_1 = 0,5,$$

$$\omega_2 = 1/T_2 = 2,$$

$$\omega_3 = 1/T_3 = 50$$

и рассмотрим последовательные частотные интервалы с различными видами асимптотической ЛАЧХ.

1-й интервал - $0 \leq \omega \leq \omega_1$:

$$\omega T_1 < 1, \quad \omega T_2 < 1, \quad \omega T_3 < 1$$

$$\bar{L}_1(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg \omega.$$

2-й интервал – $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$:

$$\omega T_1 > 1, \quad \omega T_2 < 1, \quad \omega T_3 < 1$$

$$\begin{aligned} \bar{L}_2(\omega) &= \bar{L}_1(\omega) - 20 \lg \omega T_1 = 20 \lg K - 20 \lg \omega - 20 \lg \omega T_1 = 20 \lg K - 20 \lg \omega - 20 \lg \omega - 20 \lg T_1 = \\ &= 20 \lg \frac{K}{T_1} - 40 \lg \omega. \end{aligned}$$

3-й интервал – $\omega_2 \leq \omega \leq \omega_3$:

$$\omega T_1 > 1, \quad \omega T_2 > 1, \quad \omega T_3 < 1$$

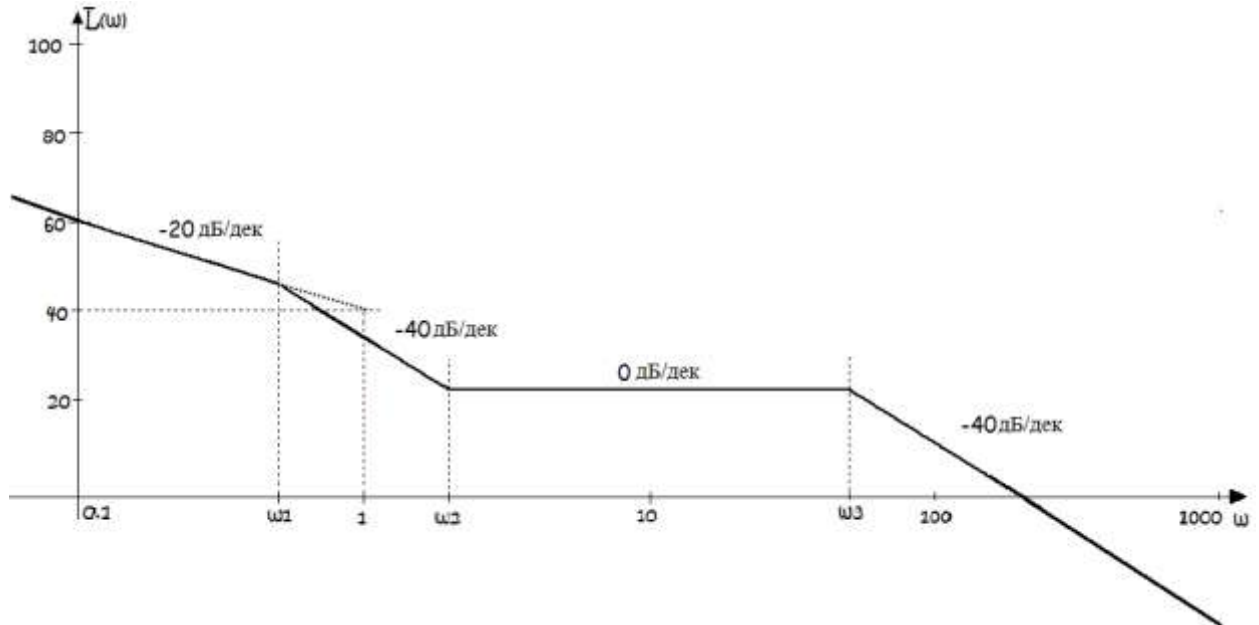
$$\bar{L}_3(\omega) = \bar{L}_2(\omega) + 40 \lg \omega T_2 = 20 \lg K - 20 \lg \omega - 20 \lg \omega T_1 + 40 \lg \omega T_2 = 20 \lg \frac{K T_2^2}{T_1} + 20 \lg \omega.$$

4-й интервал – $\omega_3 \leq \omega < \infty$:

$$\omega T_1 > 1, \quad \omega T_2 > 1, \quad \omega T_3 > 1$$

$$\bar{L}_4(\omega) = \bar{L}_3(\omega) - 40 \lg \omega T_3 = 20 \lg \frac{KT_2^2}{T_1 T_3^2} - 40 \lg \omega.$$

Таким образом, асимптотическая ЛАЧХ состоит из отрезков прямых с наклонами, указанными на графике. Уровень $\bar{L}(\omega)$ по оси ординат определяется значением продолжения $\bar{L}_1(\omega)$ на частоте $\omega = 1$, равным $20 \lg K = 20 \lg 100 = 40$ (дБ).



Пример выполнения задания 1.2

С помощью критерия Гурвица исследовать, при каких значениях коэффициента усиления K замкнутая система является устойчивой, если передаточная функция разомкнутой системы имеет вид:

$$W_p(p) = \frac{K}{(1 + pT_1)(1 + pT_2)(1 + pT_3)}, \quad T_1 = T_2 = T_3.$$

Решение:

Передаточная функция замкнутой системы имеет вид:

$$W_z(p) = \frac{W_p(p)}{1 + W_p(p)} = \frac{B_p(p)}{A_p(p)}.$$

Определим передаточную функцию заданной замкнутой системы и запишем по ней характеристический полином замкнутой системы:

$$A_z(p) = (1 + pT_1)(1 + pT_2)(1 + pT_3) + K,$$

$$A_z(p) = T_1 T_2 T_3 p^3 + (T_1 T_2 + T_2 T_3 + T_1 T_3) p^2 + (T_1 + T_2 + T_3) p + K + 1,$$

$$A_z(p) = a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3,$$

где $a_0 = T_1 T_2 T_3$, $a_1 = T_1 T_2 + T_2 T_3 + T_1 T_3$, $a_2 = T_1 + T_2 + T_3$, $a_3 = K + 1$.

Для устойчивости системы 3-го порядка по Гурвицу необходимо и достаточно, чтобы при $a_0 > 0$ были положительны все коэффициенты характеристического полинома и частный определитель Гурвица второго порядка.

Положительность коэффициентов a_0 , a_1 , a_2 , a_3 выполняется.

Составим главный определитель Гурвица:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}$$

и из него – частный определитель второго порядка

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}.$$

Для устойчивости системы должно выполняться условие:

$$\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0,$$

то есть

$$(K+1)T_1 T_2 T_3 < (T_1 + T_2 + T_3)(T_1 T_2 + T_2 T_3 + T_1 T_3).$$

Разрешим данное неравенство относительно коэффициента усиления K с учетом, что $T_1 T_2 T_3 > 0$:

$$K < \left(1 + \frac{T_1}{T_3} + \frac{T_2}{T_3}\right) \left(1 + \frac{T_3}{T_2} + \frac{T_3}{T_1}\right) - 1. \quad (*)$$

Предельным ($K_{пред}$) называется коэффициент усиления, при котором замкнутая система находится на границе устойчивости. Он находится из условия, когда неравенство (*) заменяется равенством.

В рассматриваемой задаче $T_1 = T_2 = T_3$, а значит, $K_{пред} = 8$. Таким образом, замкнутая система будет устойчивой при $0 \leq K < 8$.

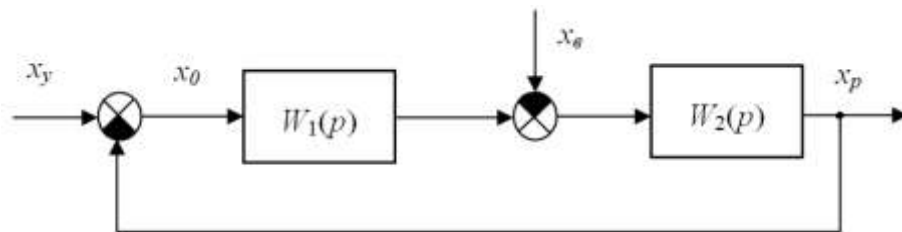
Ответ: замкнутая система устойчива при $0 \leq K < 8$.

Задание № 2 экзаменационного билета (8 баллов)

Тема 1 Анализ качества регулирования в линейных непрерывных системах автоматического управления

Задание 2.1

Найти статические ошибки по управлению и по возмущению для системы, заданной структурной схемой:



Варианты заданий:

- 1) $W_1(p) = \frac{20}{p(0,5p+1)}$, $W_2(p) = \frac{5}{3p+1}$,
- 2) $W_1(p) = \frac{20}{0,5p+1}$, $W_2(p) = \frac{5}{p(7p^2+3p+1)}$,
- 3) $W_1(p) = \frac{20}{0,5p+1}$, $W_2(p) = \frac{5}{(3p+1)^2}$,

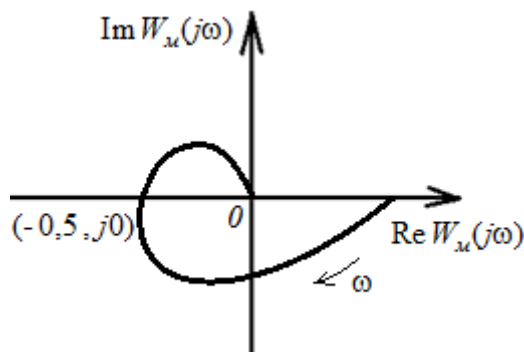
$$4) W_1(p) = \frac{20}{10p+1}, W_2(p) = \frac{10}{5p^2+2p}.$$

Тема 2 Устойчивость нелинейных непрерывных систем автоматического управления

Задание 2.2

С помощью критерия В.М. Попова исследовать устойчивость положения равновесия замкнутой нелинейной системы с устойчивой линейной частью, для которой заданы характеристика нелинейного элемента $y = \varphi(x)$ и модифицированная амплитудно-фазовая характеристика линейной части $W_m(j\omega)$.

$W_m(j\omega)$ (одинаковая для всех вариантов):



$\varphi(x)$ (по вариантам):

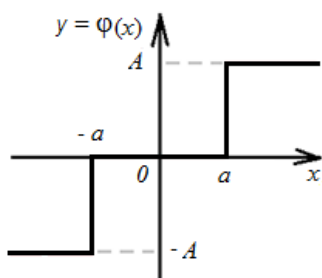


Рис. 1

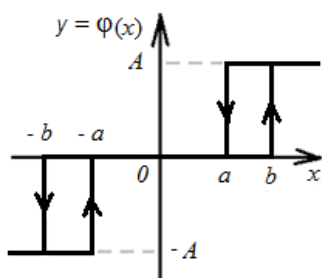


Рис. 2

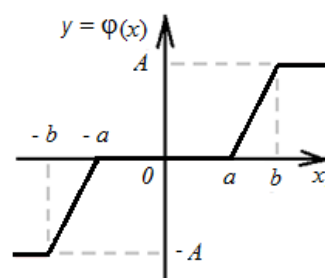


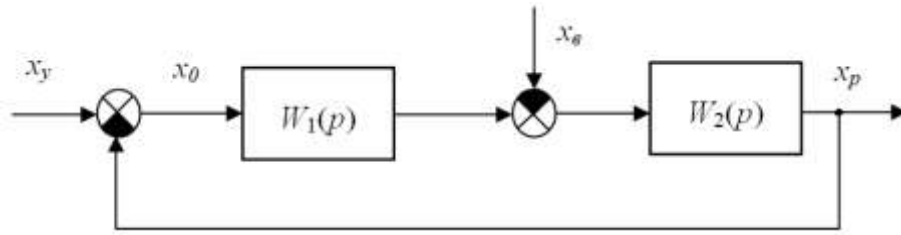
Рис. 3

Варианты заданий:

- 1) Рис. 1, $a = 3$, $A = 12$,
- 2) Рис. 1, $a = 3$, $A = 3$,
- 3) Рис. 2, $a = 2$, $b = 4$, $A = 1$,
- 4) Рис. 2, $a = 1$, $b = 3$, $A = 4$,
- 5) Рис. 3, $a = 3$, $b = 4$, $A = 2$,
- 6) Рис. 3, $a = 2$, $b = 3$, $A = 9$.

Пример выполнения задания 2.1

Найти статические ошибки по управлению и по возмущению для системы, заданной структурной схемой:



$$W_1(p) = \frac{10}{0,5p+1}; W_2(p) = \frac{5}{p(3p+1)}; x_y(t) = a \cdot u(t); x_0(t) = b \cdot u(t).$$

Решение:

Определим передаточную функцию ошибки x_{oy} по управляющему воздействию $x_y(t)$, положив $x_0(t) = 0$:

$$W_{oy}(p) = \frac{X_{oy}(p)}{X_y(p)} = \frac{1}{1 + W_1(p)W_2(p)}.$$

Изображение ошибки $x_{oy}(t)$ имеет вид:

$$X_{oy}(p) = W_{oy}(p) \cdot X_y(p) = \frac{1}{1 + W_1(p)W_2(p)} \cdot \frac{a}{p}.$$

Статическая ошибка по управлению Δ_y равна $\Delta_y = \lim_{t \rightarrow \infty} x_{oy}(t)$ или, на основании теоремы о предельном значении функции,

$$\Delta_y = \lim_{p \rightarrow 0} pX_{oy}(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + \frac{10}{0,5p+1} \cdot \frac{5}{p(3p+1)}} \cdot \frac{a}{p} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(0,5p+1)p(3p+1) \cdot a}{(0,5p+1)p(3p+1) + 50} = 0.$$

Определим передаточную функцию ошибки x_{os} по возмущению $x_0(t)$, положив $x_y(t) = 0$:

$$W_{os}(p) = \frac{X_{os}(p)}{X_0(p)} = \frac{W_2(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)}.$$

Изображение ошибки $x_{os}(t)$ имеет вид:

$$X_{os}(p) = W_{os}(p) \cdot X_0(p) = \frac{W_2(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)} \cdot \frac{b}{p}.$$

Найдем статическую ошибку по возмущению Δ_0 с учетом теоремы о предельном значении функции:

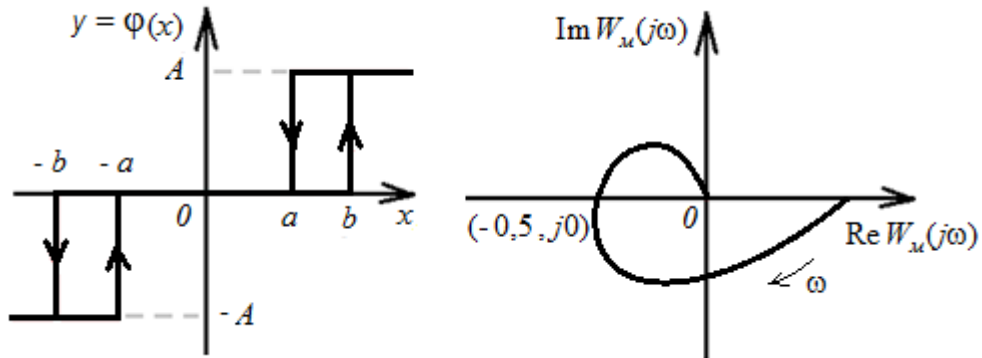
$$\Delta_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} x_{os}(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pX_{os}(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{\frac{5}{p(3p+1)}}{1 + \frac{10}{0,5p+1} \cdot \frac{5}{p(3p+1)}} \cdot \frac{b}{p} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{5(0,5p+1) \cdot b}{(0,5p+1)p(3p+1) + 10 \cdot 5} = \frac{b}{10}.$$

Ответ: статическая ошибка по управлению равна нулю ($\Delta_y = 0$), а по возмущению –

$$\Delta_0 = \frac{b}{10}.$$

Пример выполнения задания 2.2

С помощью критерия В.М. Попова исследовать устойчивость положения равновесия замкнутой нелинейной системы с устойчивой линейной частью, для которой заданы характеристика нелинейного элемента $y = \varphi(x)$ и модифицированная амплитудно-фазовая характеристика линейной части $W_m(j\omega)$:



$$a = 4, b = 6, A = 5.$$

Решение:

Характеристика нелинейного элемента лежит в секторе с нижней границей, совпадающей с осью x , и верхней границей, определяемой прямой, проходящей через точки $(0,0)$, (a,A) с угловым коэффициентом $K_0 = A/a = 1,25$. Для устойчивости положения равновесия по критерию В.М. Попова достаточно, чтобы на плоскости модифицированной амплитудно-фазовой характеристики линейной части через точку $-1/K_0$ можно было бы провести прямую с отрицательным наклоном, ввиду характеристики нелинейного элемента с пассивным гистерезисом, так, чтобы характеристика линейной части находилась справа от данной прямой. В данном случае точка $-1/K_0 = -0,8$, то есть требования критерия В.М. Попова выполняются.

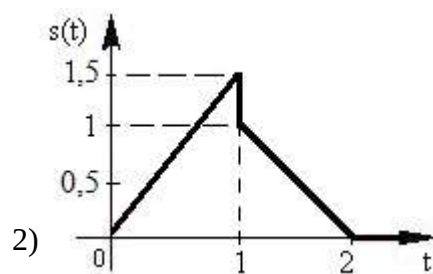
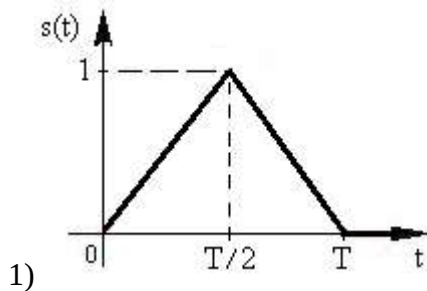
Ответ: положение равновесия замкнутой системы является устойчивым.

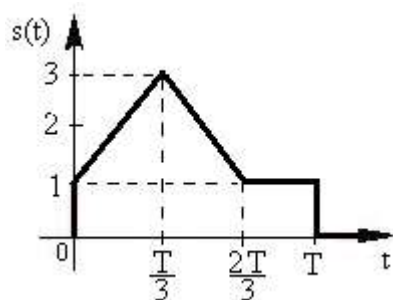
Задание № 3 экзаменационного билета (8 баллов)

Тема Импульсные системы автоматического управления

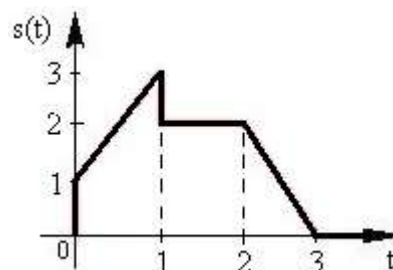
Задание 3.1

Найти передаточную функцию $W_\phi(p)$ формирующего звена, входящего в описание импульсного элемента, если импульс на его выходе имеет следующий вид:

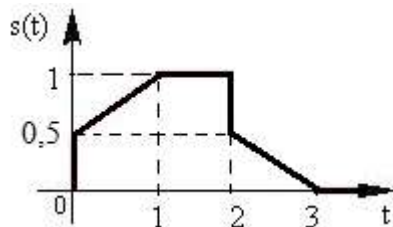




3)



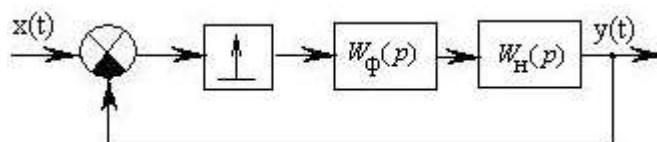
4)



5)

Задание 3.2

Для заданной структурной схемы линейной импульсной системы автоматического управления (ИСАУ) найти дискретную передаточную функцию разомкнутой ИСАУ $W_p^*(p)$.



Варианты заданий:

- 1) $W_\phi(p) = 1$, $W_n(p) = \frac{10(1+4p)}{(1+6p)(1+8p)}$,
- 2) $W_\phi(p) = \frac{1-e^{-pT}}{p}$, $W_n(p) = \frac{2(1+8p)}{(1+2p)(1+5p)}$,
- 3) $W_\phi(p) = \frac{1-e^{-pT}}{p}$, $W_n(p) = \frac{5(1+8p)}{p(1+7p)}$,
- 4) $W_\phi(p) = \frac{1-e^{-pT}}{p}$, $W_n(p) = \frac{100}{p(1+6p)}$,
- 5) $W_\phi(p) = \frac{1-e^{-pT}}{p}$, $W_n(p) = \frac{3}{1+4p}$.

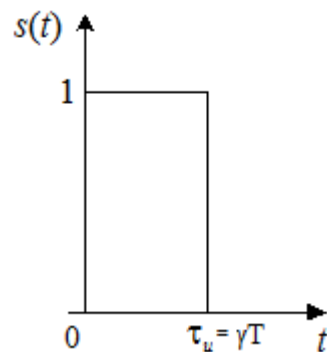
Примечание. При решении можно воспользоваться справочной таблицей изображений непрерывных и дискретных функций по Лапласу (T – период квантования):

№ п/п	$x(t)$ при $t \geq 0$	$X(p)$	$X^*(p)$
1	$1_0(t)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{e^{pT}}{e^{pT} - 1}$

2	t	$\frac{1}{p^2}$	$T \cdot \frac{e^{pT}}{(e^{pT} - 1)^2}$
3	$\frac{1}{2!}t^2$	$\frac{1}{p^3}$	$\frac{T^2}{2!} \cdot \frac{e^{pT}(e^{pT} + 1)}{(e^{pT} - 1)^3}$
4	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p + \alpha}$	$\frac{e^{pT}}{e^{pT} - e^{-\alpha T}}$
5	$te^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p + \alpha)^2}$	$T \cdot \frac{e^{-\alpha T} e^{pT}}{(e^{pT} - e^{-\alpha T})^2}$

Пример выполнения задания 3.1

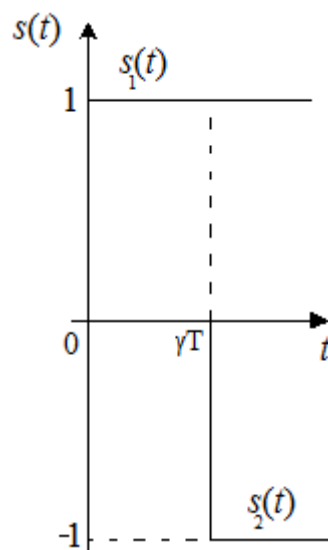
Найти передаточную функцию $W_\Phi(p)$ формирующего звена, вырабатывающего импульс прямоугольной формы:



длительности $\tau_u = \gamma T$, где $0 < \gamma \leq 1$.

Решение:

Рассматриваемый импульс $s(t)$ можно представить как сумму функций $s_1(t)$ и $s_2(t)$, где $s_1(t) = 1_0(t)$ и $s_2(t) = 1_0(t - \gamma T)$ (см. нижеприведенный рисунок):



Таким образом, аналитическое выражение для заданного импульса имеет вид:

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) = 1_0(t) - 1_0(t - \gamma T).$$

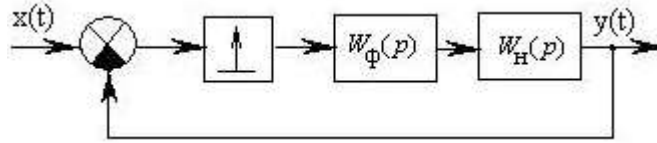
Отсюда передаточная функция формирующего звена будет равна

$$W_{\phi}(p) = L\{s(t)\} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-\gamma p T} = \frac{1 - e^{-\gamma p T}}{p}.$$

Ответ: $W_{\phi}(p) = \frac{1 - e^{-\gamma p T}}{p}.$

Пример выполнения задания 3.2

Для заданной структурной схемы линейной импульсной системы автоматического управления (ИСАУ) найти дискретную передаточную функцию разомкнутой ИСАУ $W_p^*(p)$.



$$W_{\phi}(p) = \frac{1 - e^{-pT}}{p}, \quad W_n(p) = \frac{K_1}{1 + pT_1}.$$

Решение:

Дискретная передаточная функция разомкнутой ИСАУ может быть найдена как $\bar{D}$ -преобразование передаточной функции $W_n(p)$ приведенной непрерывной части системы, которая, в свою очередь, равна $W_{\phi}(p) \cdot W_n(p)$:

$$W_p^*(p) = \bar{D}\{W_n(p)\} = \bar{D}\{W_{\phi}(p) \cdot W_n(p)\} = \bar{D}\left\{\frac{1 - e^{-pT}}{p} \cdot \frac{K_1}{1 + pT_1}\right\}.$$

С учетом свойства линейности $\bar{D}$ -преобразования и теоремы об умножении преобразуемой функции (изображения непрерывного сигнала) на экспоненту получим

$$W_p^*(p) = K_1(1 - e^{-pT})\bar{D}\left\{\frac{1}{p(1 + pT_1)}\right\}.$$

Далее представим выражение в фигурных скобках в виде суммы простых дробей, для которых можно воспользоваться таблицей, связывающей изображения непрерывных и дискретных сигналов. В результате получим

$$\begin{aligned} W_p^*(p) &= K_1(1 - e^{-pT})\bar{D}\left\{\frac{1}{p} - \frac{1}{p + 1/T_1}\right\} = K_1(1 - e^{-pT})\left(\frac{e^{pT}}{e^{pT} - 1} - \frac{e^{pT}}{e^{pT} - e^{-\frac{T}{T_1}}}\right) = \\ &= K_1(e^{pT} - 1) \frac{e^{pT} - e^{-\frac{T}{T_1}} - e^{pT} + 1}{(e^{pT} - 1)\left(e^{pT} - e^{-\frac{T}{T_1}}\right)} = K_1 \frac{1 - e^{-\frac{T}{T_1}}}{e^{pT} - e^{-\frac{T}{T_1}}}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } W_p^*(p) = K_1 \frac{1 - e^{-\frac{T}{T_1}}}{e^{pT} - e^{-\frac{T}{T_1}}}.$$

Задание № 4 экзаменационного билета (16 баллов)

Тема Модели описания систем и их преобразование

Задание 4

По заданной системе дифференциальных уравнений составить структурную схему системы автоматического управления и определить передаточную функцию системы

$W(p) = \frac{X_{\text{вых}}(p)}{X_{\text{вх}}(p)}$, используя правила структурных преобразований.

$1) \begin{cases} x_1 = x_{\text{вх}} - x_4 \\ x_2 = T_1 \frac{dx_1}{dt} \\ x_3 = K_3 x_{\text{вых}} \\ T_2 \frac{dx_4}{dt} + x_4 = K_2 x_5 \\ x_5 = x_2 + x_3 \\ T_3 \frac{dx_{\text{вых}}}{dt} + x_{\text{вых}} = K_4 (T_4 \frac{dx_5}{dt} + x_5) \end{cases}$	$2) \begin{cases} \delta = x_{\text{вх}} - x_7 \\ x_2 = T_2 x_{\text{вх}} \\ T_5 \frac{dx_5}{dt} + x_5 = K_5 x_{\text{вых}} \\ T_1 \frac{dx_1}{dt} + x_1 = K_1 \delta \\ T_4 \frac{dx_4}{dt} + x_4 = K_4 (T_3 \frac{dx_{\text{вых}}}{dt} + x_{\text{вых}}) \\ \frac{dx_{\text{вых}}}{dt} = K_3 (x_1 + x_2) \\ x_6 = K_6 x_5 \\ x_7 = x_4 + x_6 \end{cases}$
$3) \begin{cases} \delta = x_{\text{вх}} - x_{\text{вых}} \\ x_3 = K_3 (\delta - x_2) \\ T_1 \frac{dx_1}{dt} + x_1 = K_1 (\delta - x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} = K_2 x_1 \\ T_4 \frac{dx_4}{dt} + x_4 = K_4 (T_3 \frac{dx_1}{dt} + x_1) \\ x_5 = K_5 (x_3 + x_4) \\ T_6 \frac{dx_{\text{вых}}}{dt} + x_{\text{вых}} = K_6 x_5 \end{cases}$	$4) \begin{cases} \delta = x_{\text{вх}} - x_7 \\ x_1 = K_1 \delta \\ T_2 \frac{dx_2}{dt} + x_2 = K_2 x_1 \\ T_3 \frac{dx_{\text{вых}}}{dt} + x_{\text{вых}} = K_3 \left(T_7 \frac{dx_2}{dt} + x_2 \right) \\ T_5 \frac{dx_5}{dt} + x_5 = K_5 x_2 \\ T_4 \frac{dx_4}{dt} + x_4 = K_4 (x_5 + x_{\text{вых}}) \\ T_6 \frac{dx_6}{dt} + x_6 = K_6 x_1 \\ x_7 = x_4 + x_6 \end{cases}$

$5) \begin{cases} \delta = x_{\text{ex}} - x_5 \\ T_1 \frac{dx_1}{dt} + x_1 = K_1 \delta \\ T_2 \frac{dx_2}{dt} + x_2 = K_2 \delta \\ x_3 = x_1 + x_2 - x_4 \\ x_{\text{блх}} = K_3 x_3 \\ x_5 = x_{\text{блх}} + x_3 \\ T_4 \frac{dx_4}{dt} + x_4 = K_4 x_{\text{блх}} \end{cases}$	$6) \begin{cases} \delta = x_{\text{ex}} - x_4 \\ x_3 = \delta - x_2 \\ T_1 \frac{dx_1}{dt} + x_1 = K_1 (T_2 \frac{dx_3}{dt} + x_3) \\ x_2 = K_2 \frac{dx_1}{dt} \\ T_4 \frac{dx_4}{dt} + x_4 = K_4 (x_1 + x_{\text{блх}}) \\ T_3 \frac{dx_{\text{блх}}}{dt} + x_{\text{блх}} = K_3 x_1 \end{cases}$
--	--

Пример выполнения задания 4

По заданной системе дифференциальных уравнений составить структурную схему системы автоматического управления и определить передаточную функцию системы, используя правила структурных преобразований:

$$\begin{cases} x_1 = x_{\text{ex}} - x_4 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x_2 = T_1 \frac{dx_1}{dt} \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x_3 = K_3 x_{\text{блх}} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} T_2 \frac{dx_4}{dt} + x_4 = K_2 x_5 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} x_5 = x_2 + x_3 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} T_3 \frac{dx_{\text{блх}}}{dt} + x_{\text{блх}} = K_4 (T_4 \frac{dx_5}{dt} + x_5) \end{cases} \quad (6)$$

Решение:

Преобразуя уравнения (1) – (6) по Лапласу при нулевых начальных условиях, получим:

$$\begin{cases} X_1(p) = X_{\text{ex}}(p) - X_4(p) \end{cases} \quad (1')$$

$$\begin{cases} X_2 = T_1 p X_1(p) \end{cases} \quad (2')$$

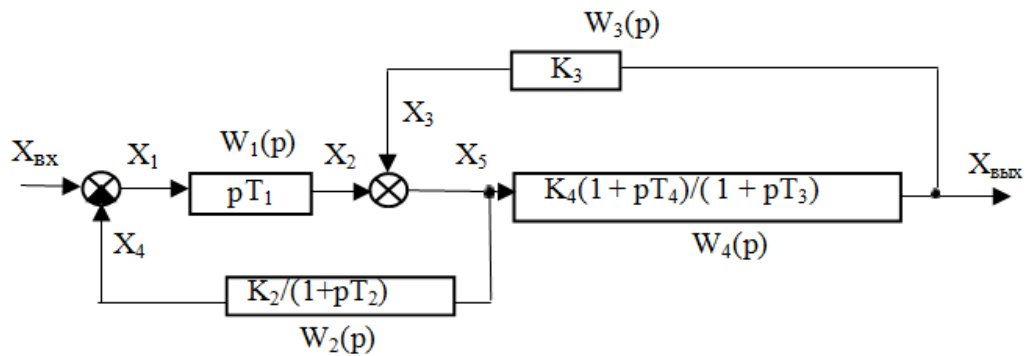
$$\begin{cases} X_3(p) = K_3 X_{\text{блх}}(p) \end{cases} \quad (3')$$

$$\begin{cases} (T_2 p + 1) X_4(p) = K_2 X_5(p) \end{cases} \quad (4')$$

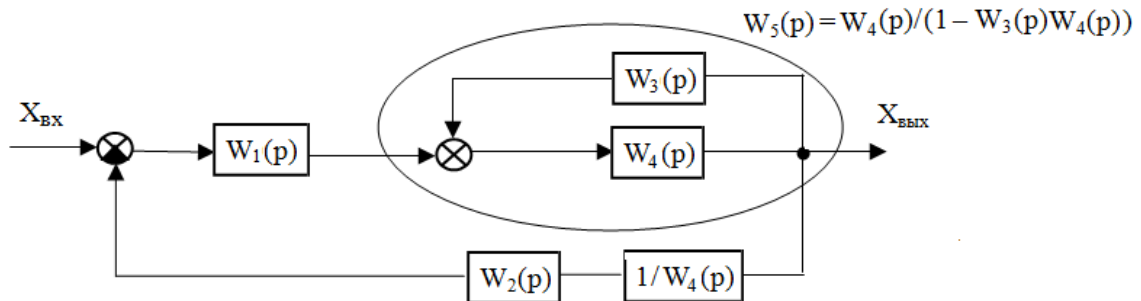
$$\begin{cases} X_5(p) = X_2(p) + X_3(p) \end{cases} \quad (5')$$

$$\begin{cases} (T_3 p + 1) X_{\text{блх}} = K_4 (T_4 p + 1) X_5 \end{cases} \quad (6')$$

Полученной системе уравнений соответствует структурная схема:

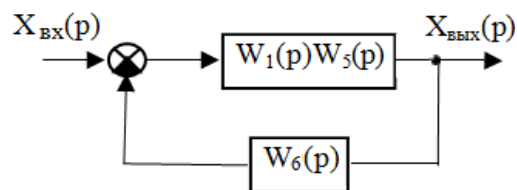


Обозначим для удобства передаточные функции динамических звеньев как $W_1(p)$, $W_2(p)$, $W_3(p)$ и $W_4(p)$. Согласно правилам структурных преобразований, перенесем левый узел через звено с передаточной функцией $W_4(p)$ со входа данного звена на его выход (при этом в цепь ответвления добавится звено с передаточной функцией, обратной $W_4(p)$):



Вычислим передаточную функцию соединения звеньев в цепь обратной связи и обозначим ее как $W_5(p)$; последовательно соединенные звенья с передаточными функциями $W_2(p)$ и $1/W_4(p)$ эквивалентны звену с передаточной функцией $W_2(p)/W_4(p)$ – обозначим ее как $W_6(p)$.

Далее, с учетом того, что звенья с передаточными функциями $W_1(p)$ и $W_5(p)$ соединены последовательно, будем иметь:



Искомая передаточная функция системы вычисляется как передаточная функция соединения звеньев в цепь обратной связи: $W(p) = \frac{W_1(p)W_5(p)}{1 + W_1(p)W_5(p)W_6(p)}$.

Ответ: передаточная функция системы равна $W(p) = \frac{W_1(p)W_5(p)}{1 + W_1(p)W_5(p)W_6(p)}$, где

$$W_1(p) = pT_1, \quad W_5(p) = \frac{W_4(p)}{1 - W_3(p)W_4(p)} = \frac{\frac{K_4(1+pT_4)}{1+pT_3}}{1 - \frac{K_3K_4(1+pT_4)}{1+pT_3}} \quad \text{и} \quad W_6(p) = \frac{W_2(p)}{W_4(p)} = \frac{\frac{K_2}{1+pT_2}}{\frac{K_4(1+pT_4)}{1+pT_3}}.$$

Специальная часть

Задание № 5 экзаменационного билета (10 баллов)

Тема 1 Основные понятия информационных технологий

Задание 5.1 (теоретическое)

Классификация программного обеспечения (ПО) автоматизированных систем по различным критериям. Примеры.

Задание 5.2 (теоретическое)

Компьютерные сети, модель OSI, адресация и маршрутизация в IP-сетях.

Задание 5.3 (теоретическое)

СУБД, их назначение, основные функции, обобщенная архитектура. Реляционная модель данных в СУБД.

Тема 2 Аппаратное обеспечение автоматизированных систем

Задание 5.4 (теоретическое)

Триггеры. Классификация. Основные типы триггеров, функциональность, таблицы состояний.

Задание 5.5 (теоретическое)

АЦП и ЦАП – назначение, основные схемы квантования сигнала.

Задание 5.6 (теоретическое)

Программируемые логические контроллеры – назначение и основные функции, области применения.

Задание № 6 экзаменационного билета (10 баллов)

Тема Программные средства для решения задач моделирования, исследования и разработки систем управления

Задание 6.1 (теоретическое)

Среда программирования Python. Понятия объекта и класса в Python. Встроенные и пользовательские классы. Создание пользовательских классов и объектов.

Задание 6.2 (теоретическое)

Структурные компоненты программ в Python. Понятие объекта-функции. Классификация функций. Стандартные функции и способы их использования. Шаблон оформления обычной пользовательской функции.

Задание 6.3 (теоретическое)

Классы, к которым относится Python по разным классификациям ПО. Основные характеристики среды Python. Полезные свойства и недостатки языка. Области применения среды Python. Возможность установки дополнительных пакетов программ.

Задание 6.4 (практическое)

Разработайте алгоритм и напишите программу (на одном из языков: C/C++, Python, Delphi, m, R), выполняющую следующие операции:

- 1) Ввод данных из файла Dan.txt (в столбец записаны числовые данные, представляющие выработку электроэнергии на ТЭЦ по дням месяца на некотором календарном периоде).
- 2) Расчет по этим данные значения среднедневной выработки электроэнергии.
- 3) Определение числа дней, в которые выработка электроэнергии превышала это среднее значение.
- 4) Отображение результатов расчетов.

Задание 6.5 (практическое)

Разработайте алгоритм и напишите программу (на одном из языков: C/C++, Python, Delphi, m, R), выполняющую следующие операции:

- ввод из текстового файла Dan.txt записанных в столбец числовых данных – измерений ежедневно в некотором месяце значений выработки тепловой энергии на одной из ТЭЦ;
- расчет абсолютных изменений выработки тепла в каждый день в сравнении с предыдущим днем;
- определение и отображение этих изменений для трех дней с наибольшими рассчитанными изменениями (дни и значения).

Примеры выполнения задания 6.4

На языке m

```
ElEn=load('Dan.txt')
N=length(ElEn)
Srd=mean(ElEn)
NN=sum(ElEn>Srd)
fprintf('Число дней с выработкой больше средней = %d\n',NN)
```

На языке Python

```
ff=open('Dan.txt','rt')
dan=[]
for strk in ff:
    dan.append(float(strk.rstrip('\n')))

ff.close()
N=len(dan)
Srd=sum(dan)/N
NN=0
for r in dan:
    if r>Srd:NN+=1
print('Число дней с повышенной выработкой=',NN)
```

На языке R

```
dan=scan('Dan.txt')
N=length(dan)
Srd=mean(dan)
NN=0
for (r in dan) if (r>Srd)NN=NN+1
cat('Число превышений=',NN,'\n')
```

Примеры выполнения задания 6.5

На языке m

```
Teplo=load('Dan.txt')
N=length(Teplo)
Izmen=abs(Teplo(2:end)-Teplo(1:end-1))
Res=sortrows([(2:N)' Izmen],2)
fprintf('День = %d изменение = %f\n',Res(end-2:end,:))
```

На языке Python

```
ff=open('Dan.txt','rt')
dan=[]
for strk in ff:
    dan.append(float(strk.rstrip('\n')))

ff.close()
N=len(dan)
Izmen=[]
for i in range(1,N):
    Izmen.append(abs(dan[i]-dan[i-1]))

dni=[]
Izmen1=Izmen
for i in range(3):
    r=max(Izmen1)
    m=Izmen1.index(r)
    dni.append(m)
    Izmen1[m]=0
    print('день='+str(m)+' Изменение = '+str(r)+'\n')
```

На языке R

```
dan=scan('Dan.txt')
N=length(dan)
Izmen=dan[2:N]-dan[1:N-1]
Mas=array(c(2:N,Izmen),c(N-1,2))
Mas1=Mas[order(Mas[,2]),]
print(Mas1[(N-3):(N-1),])
```

Задание № 7 экзаменационного билета (10 баллов)

Тема 1 Программные средства для решения задач моделирования, исследования и разработки систем управления

Задание 7.1 (теоретическое)

Язык программирования С или С++ (на выбор): положение в различных классификациях языков программирования, преимущества и недостатки применения при разработке и исследовании систем управления. Состав, роли и связь средств сборки и разработки программ.

Задание 7.2 (теоретическое)

Программные среды с m-языком: названия, положение в различных классификациях программного обеспечения, область применения. Преимущества, недостатки и особенности по сравнению с языками общего назначения.

Задание 7.3 (теоретическое)

Варианты применения программных сред с m-языком для разработки и исследования систем управления. Языковые средства управления потоком выполнения. Встроенные функции для работы с матрицами.

Задание 7.4 (теоретическое)

Применение программных сред с m-языком для исследования данных. Встроенные функции для ввода и вывода данных. Иерархия графических объектов в средах с m-языком. Встроенные функции для построения графиков.

Тема 2 Проектирование структур баз данных при разработке программного обеспечения систем управления

Задание 7.5 (практическое)

Спроектировать структуру базы данных для хранения (учета) информации о сдаче экзаменов студентами в ходе сессии (промежуточной аттестации).

В базе данных должна храниться следующая информация (минимальный набор полей) по каждому экзамену, сданному каждым студентом в ходе промежуточной аттестации: фамилия, имя, отчество студента; код направления подготовки студента; наименование учебной группы студента; код и наименование дисциплины, по которой производится аттестация; год утверждения учебного плана, включающего дисциплину, по которой производится аттестация; номер семестра с аттестацией по дисциплине; вид промежуточной аттестации (первичная, повторная, вторая повторная: ПА, ППА1, ППА2); дата аттестации; ФИО преподавателя, проводившего аттестацию; полученная оценка.

В состав базы данных должно входить не менее трех взаимосвязанных таблиц, каждая из которых находится в третьей нормальной форме. Для каждого хранимого поля укажите тип данных.

Пример выполнения задания 7.5

Таб.1. Данные о сдаче экзаменов

Ключ	Содержание поля	Тип данных
	ID студента	Целое число
	Код дисциплины по учебному плану	Текст
	Номер семестра с аттестацией по дисциплине	Текст
	Вид промежуточной аттестации (первичная, повторная, вторая повторная: ПА, ППА1, ППА2)	Текст
	Дата аттестации	Дата
	ФИО преподавателя, проводившего аттестацию	Текст
	Полученная оценка	Целое число

Таб.2. Обучающиеся студенты

Ключ	Содержание поля	Тип данных
	ID студента	Целое число
	Фамилия имя отчество	Текст
	Код направления подготовки	Текст
	Учебная группа	Текст
	...	

Таб.3. Дисциплины

Ключ	Содержание поля	Тип данных
	Код дисциплины по учебному плану	Целое число
	Наименование дисциплины	Текст
	Год утверждения учебного плана	Целое число
	...	

Задание № 8 экзаменационного билета (10 баллов)**Тема Статистический анализ данных****Задание 8.1 (теоретическое)**

Основные типы гипотез, проверяемых в статистическом анализе. Ошибки первого и второго рода. Мощность критерия.

Задание 8.2 (теоретическое)

Свойства точечных оценок (несмещенность, состоятельность, эффективность). Обоснование несмещенности оценок МНК.

Задание 8.3 (теоретическое)

Точечные и интервальные оценки. Построение доверительных интервалов для коэффициентов регрессии. Построение доверительных интервалов для прогноза отклика.

Задание 8.4 (теоретическое)

Постановка задачи классификации и кластеризации.

Задание 8.5 (задача)

Определить оценки параметров линейной регрессии ($y = b_0 + b_1 x_1$), характеризующей зависимость стоимости регулятора от его быстродействия (размер выборки $N=5$). Построить стандартизированное уравнение регрессии.

Стоимость x (тыс. руб.)	72	75	79	81	83
Быстродействие y (сек.)	18	20	21	24	25

Пример выполнения задания 8.5

Воспользуемся формулами для расчета оценок коэффициентов регрессии:

$$\hat{b}_0 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y_j - \hat{b}_1 \sum_{j=1}^N x_j = \bar{y} - \hat{b}_1 \bar{x}$$

$$\hat{b}_1 = \frac{\sum_{j=1}^N x_j y_j - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y_j \sum_{j=1}^N x_j}{\sum_{j=1}^N x_j^2 - \frac{1}{N} (\sum_{j=1}^N x_j)^2}$$

$$\bar{y} = 21,6$$

$$\bar{x} = 78$$

$$\hat{b}_1 = \frac{(72 * 18 + 75 * 20 + 79 * 21 + 81 * 24 + 83 * 25) - \frac{1}{5}(108 * 390)}{(5184 + 5625 + 6241 + 6561 + 6889) - \frac{1}{5}(390)^2} = \frac{8474 - 8424}{30500 - 30420} = \frac{50}{80} = 0,625$$

$$\hat{b}_0 = \bar{y} - \hat{b}_1 \bar{x} = 21,6 - 0,625 * 78 = -27,15$$

Как известно, в стандартизированном уравнении регрессии отсутствует свободный член, аналогичный коэффициенту b_0 . Между коэффициентами стандартизированного уравнения β_i и коэффициентами b_i существует связь, выражаемая отношением:

$$\hat{b}_i = \hat{\beta}_i \frac{S_y}{S_{ii}}$$

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^N (y_j - \bar{y})^2}{N-1}} \quad \text{и} \quad S_{ii} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^N (x_j^{(i)} - \bar{x}^{(i)})^2}{N-1}}$$

$$\text{Определим } S_y = \sqrt{\frac{33,2}{4}} = 2,88 \text{ и } S_{11} = \sqrt{\frac{80}{4}} = 4,47$$

$$\hat{\beta}_1 = 0,625 * \frac{4,47}{2,88} = 0,97$$

Стандартизированное уравнение имеет вид: $\hat{y}^* = 0,97x^*$

Задание № 9 экзаменационного билета (10 баллов)

Тема Статистический анализ данных

Задание 9.1 (теоретическое)

Многомерное нормальное распределение. Центральная предельная теорема. Теорема Муавра-Лапласа. Преимущества и недостатки аппроксимации вероятностных свойств реальных данных с помощью нормального закона распределения.

Задание 9.2 (теоретическое)

Способы проверки адекватности регрессионной модели.

Задание 9.3 (теоретическое)

Регрессионный анализ (РА), основные предположения. Влияние несоблюдения предположений на результаты РА.

Задание 9.4 (теоретическое)

Использование метода главных компонент для снижения размерности и визуализации многомерных данных.

Задание 9.5 (задача)

Ковариационная матрица оценок парной регрессии $y = 0,451 + 0,577x^{(1)}$ имеет вид:

$$K = \begin{bmatrix} 3.449 & -0.468 \\ -0.468 & 0.065 \end{bmatrix}.$$

Построить доверительные интервалы для коэффициентов b_0 и b_1 для уровня значимости $\alpha = 0,05$, если размер выборки $N=5$.

Пример выполнения задания 9.5

Доверительные интервалы вычисляются по формулам:

$$\hat{b} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-k)S_{\hat{b}_i} \leq b_i \leq \hat{b} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-k)S_{\hat{b}_i}$$

Из таблицы t -распределения для $N=5$, $k=2$, $\alpha = 0,05$ находим:

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-2) = t_{0,975}(3) = 3,182.$$

Учитывая, что на главной диагонали ковариационной матрицы находятся дисперсии оценок, получаем:

$$S_{\hat{b}_0} = \sqrt{3,449} = 1,856$$

$$S_{\hat{b}_1} = \sqrt{0,065} = 0,255.$$

Проведем промежуточные расчеты:

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-k)S_{\hat{b}_0} = 3,182 \cdot 1,856 = 5,909$$

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-k)S_{\hat{b}_1} = 3,182 \cdot 0,255 = 0,811$$

Ответ:

доверительный интервал для b_0 : $0,451 \pm 5,909$;

доверительный интервал для b_1 : $0,577 \pm 0,811$.

Задание № 10 экзаменационного билета (10 баллов)

Тема Статистический анализ данных

Задание 10.1 (теоретическое)

Метод главных компонент и его геометрическая интерпретация.

Задание 10.2 (теоретическое)

Принцип использования метода главных компонент для визуализации многомерных данных.

Задание 10.3 (теоретическое)

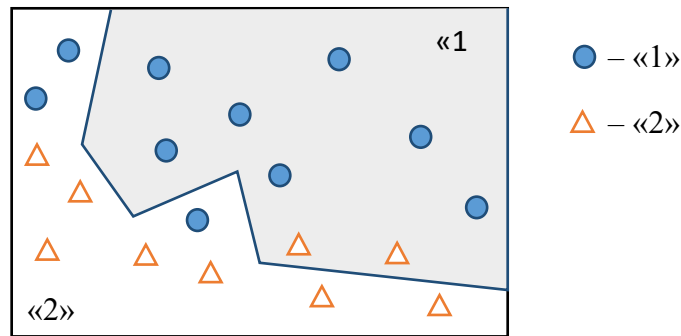
Постановка задачи кластеризации данных на выборке. Метод кластеризации К-средних.

Задание 10.4 (теоретическое)

Матрица ошибок при решении задачи классификации. Оценки качества бинарной классификации.

Задание 10.5 (задача)

Рассчитать оценки качества Accuracy, Precision, Recall, F1-score для класса «1» на выборке, показанной на области истинных значений классов.



Пример выполнения задания 10.5

Оценки Accuracy, Precision, Recall, F1-score для бинарной классификации рассчитываются по следующим формулам:

$$Accuracy = \frac{TP + TN}{TP + TN + FP + FN}$$

$$Precision = \frac{TP}{TP + FP}$$

$$Recall = \frac{TP}{TP + FN}$$

$$F_1score = 2 \frac{Precision \cdot Recall}{Precision + Recall}$$

где TP – число правильно классифицированных примеров целевого класса, TN – число правильно классифицированных примеров противоположного класса, FP – число неправильно классифицированных примеров, отнесенных к целевому классу, FN – число неправильно классифицированных примеров, отнесенных к противоположному классу.

Целевым классом является «1», а противоположным – «2». Посчитав принадлежность примеров областям истинных значений классов, получим:

$$TP = 7; TN = 7; FP = 2; FN = 3$$

Рассчитаем значения

$$Accuracy = \frac{14}{19} = 0.89$$

$$Precision = \frac{7}{9} = 0.78$$

$$Recall = \frac{7}{10} = 0.70$$

$$F_1score = 2 * \frac{49}{90} * \frac{1}{\frac{7}{9} + \frac{7}{10}} = 2 * \frac{49}{90} * \frac{90}{133} = \frac{98}{133} = 0.74$$