| | |
|---|---|
| **Институт** | **Радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова** |
| **Направление подготовки** | 11.04.01 Радиотехника |

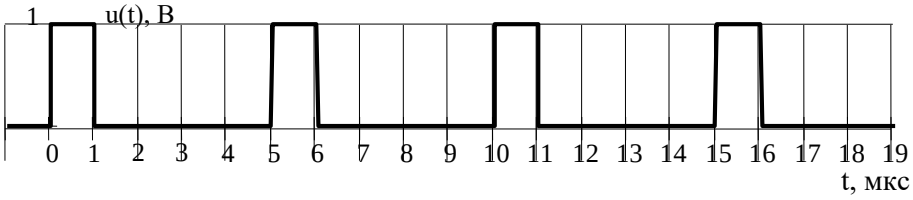
# БАНК ЗАДАНИЙ ПО БАЗОВОЙ ЧАСТИ ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ В МАГИСТРАТУРУ

***Тема: Основы теории сигналов и цепей***

**Задание экзаменационного билета № 1 (5 баллов)**

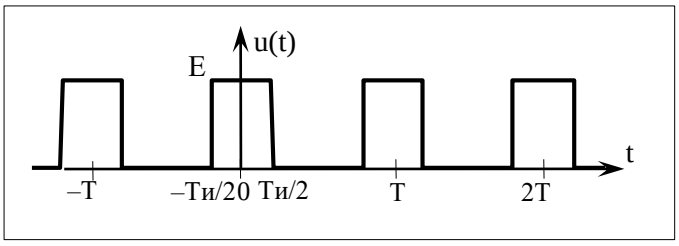
Задание 1.1

Периодический сигнал изображен на рисунке. Вычислите частоту и амплитуду первой гармоники, а также постоянную составляющую сигнала.




Задание 1.2

Найдите коэффициенты разложения в ряд Фурье периодической последовательности прямоугольных импульсов, изображенной на рисунке. Постройте спектральную диаграмму для скважности $T/T_и = 4$.

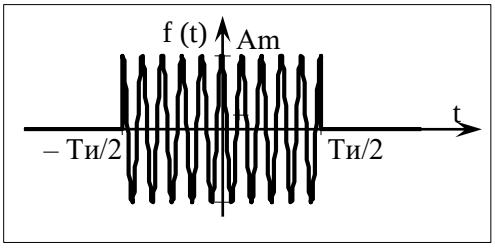



Задание 1.3

Найдите спектральную плотность импульса $u(t) = 10\ \exp(-2{,}3\cdot 10^6\, t)$ В, $t \geq 0$. Постройте зависимость модуля спектральной плотности от частоты.

Задание 1.4

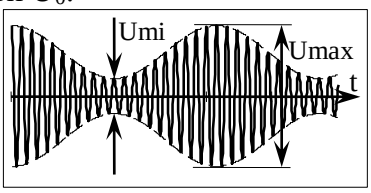
Найдите спектральную плотность радиоимпульса с прямоугольной огибающей. Постройте график модуля спектральной плотности, если длительность импульса $T_и = 10$ мкс, амплитуда $A_m = 10$ В, частота заполнения $f_0 = 1$ МГц.



**Задание экзаменационного билета № 2 (5 баллов)**

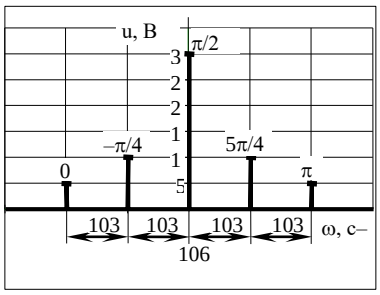
Задание 2.1

Огибающая однотонального АМ-сигнала имеет максимальное значение $U_{max}$ = 16 В и минимальное значение $U_{min}$ = 4 В (см. рисунок). Найдите коэффициент модуляции $M$ и амплитуду несущей составляющей $U_0$.




Задание 2.2

Спектральная диаграмма сигнала $u(t)$ приведена на рисунке. Найдите среднюю мощность, выделяемую сигналом в резисторе с сопротивлением 1 Ом. Определите, какую долю от мощности немодулированного несущего колебания составляет мощность боковых составляющих.




Задание 2.3

Радиостанция, работающая с несущей частотой $f_0$ = 80 МГц, излучает ФМ-сигнал, промодулированный частотой 15 кГц. Индекс модуляции $m$ = 12. Найдите пределы, в которых меняется мгновенная частота сигнала. Определите практическую ширину спектра ФМ-сигнала.

Задание 2.4

К последовательному колебательному контуру с резонансной частотой 1 МГц и полосой пропускания 20 кГц подключена амплитудно-модулированная э.д.с. $e(t) = 10 \cdot \left(1 + 0{,}8\cos 2\pi \cdot 10^4 t\right)\cos\left(2\pi \cdot 10^6 t\right)$, В. Найдите коэффициент модуляции тока в контуре.

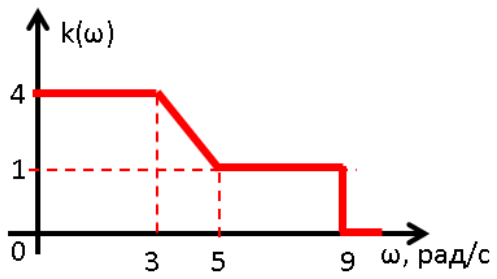
Задание 2.5

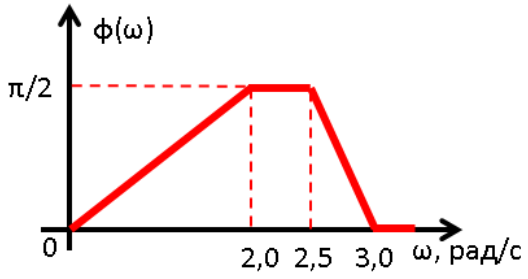
Радиостанция работает на волне 300 м и ее сигнал модулирован по амплитуде колебанием $s(t) = A\cos\left(2\pi \cdot 10^3 t\right)$. Какой добротностью должен обладать контур, настроенный на эту станцию, чтобы боковые частоты ослаблялись им не более чем на 3 дБ.

**Задание экзаменационного билета № 3 (5 баллов)**

Задание 3.1

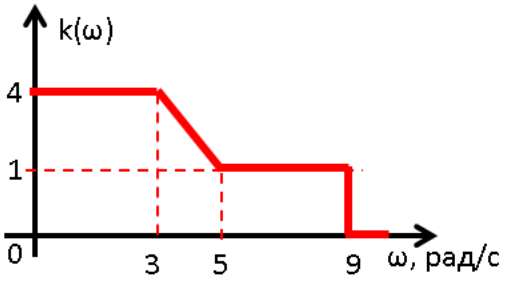
На вход четырехполюсника с заданными частотными характеристиками, представленными на рисунке, подаётся гармонический сигнал с амплитудой 6 В, частотой 4 рад/с и нулевой начальной фазой. Получите аналитическое выражение на выходе заданного четырехполюсника.

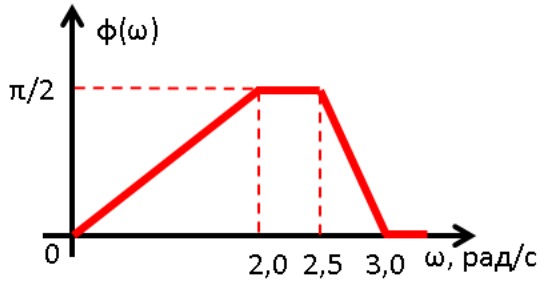



Задание 3.2

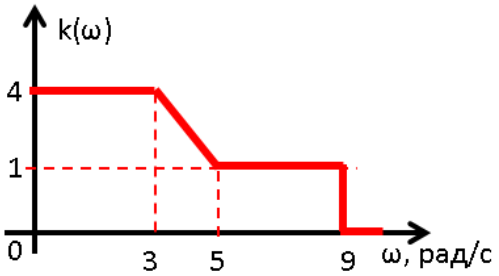
На вход четырехполюсника с заданными частотными характеристиками, представленными на рисунке, подаётся гармонический сигнал с амплитудой 5 В, частотой 1 рад/с и нулевой начальной фазой. Получите аналитическое выражение на выходе заданного четырехполюсника.

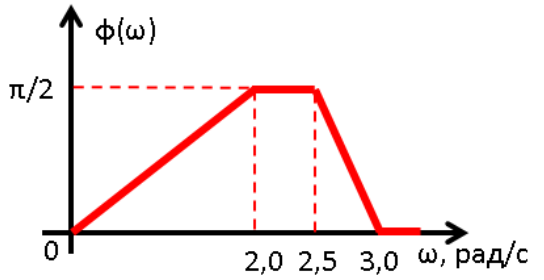



Задание 3.3

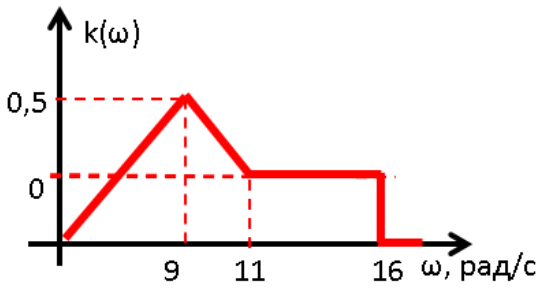
На вход четырехполюсника с заданными частотными характеристиками, представленными на рисунке, подаётся гармонический сигнал с амплитудой 6 В, частотой 2,8 рад/с и нулевой начальной фазой. Получите аналитическое выражение на выходе заданного четырехполюсника.

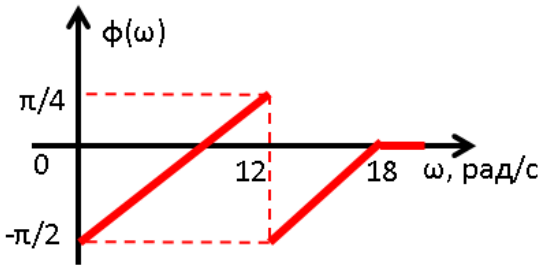


Задание 3.4

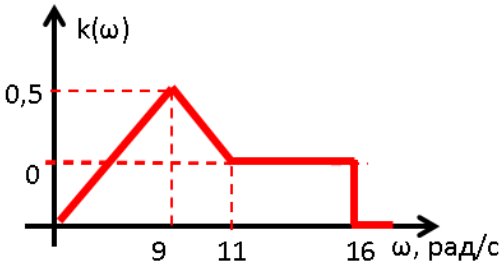
На вход четырехполюсника с заданными частотными характеристиками, представленными на рисунке, подаётся гармонический сигнал с амплитудой 4 В, частотой 13 рад/с и нулевой начальной фазой. Получите аналитическое выражение на выходе заданного четырехполюсника.

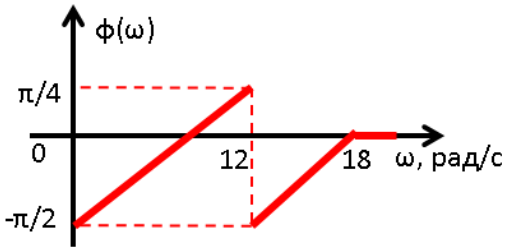



Задание 3.5

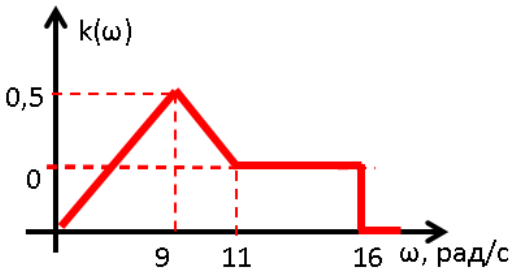
На вход четырехполюсника с заданными частотными характеристиками, представленными на рисунке, подаётся гармонический сигнал с амплитудой 10 В, частотой 10 рад/с и нулевой начальной фазой. Получите аналитическое выражение на выходе заданного четырехполюсника.

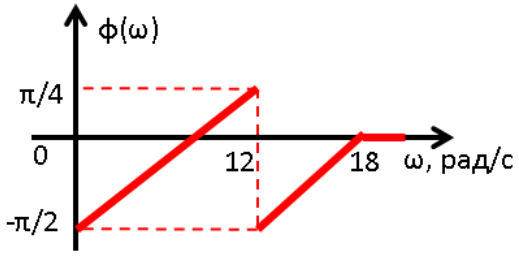



Задание 3.6

На вход четырехполюсника с заданными частотными характеристиками, представленными на рисунке, подаётся гармонический сигнал с амплитудой 12 В, частотой 7 рад/с и нулевой начальной фазой. Получите аналитическое выражение на выходе заданного четырехполюсника.



**Задание экзаменационного билета № 4 (25 баллов)**

Задание 4.1

Рассчитайте индуктивность и сопротивление потерь колебательного контура, ослабляющего крайние практически важные составляющие спектра частотно-модулированного колебания не более чем на 3 дБ. Параметры ЧМ-колебания: средняя частота 16 МГц, индекс модуляции 20, модулирующая частота 8 кГц. Емкость контура 100 пФ.

Задание 4.2

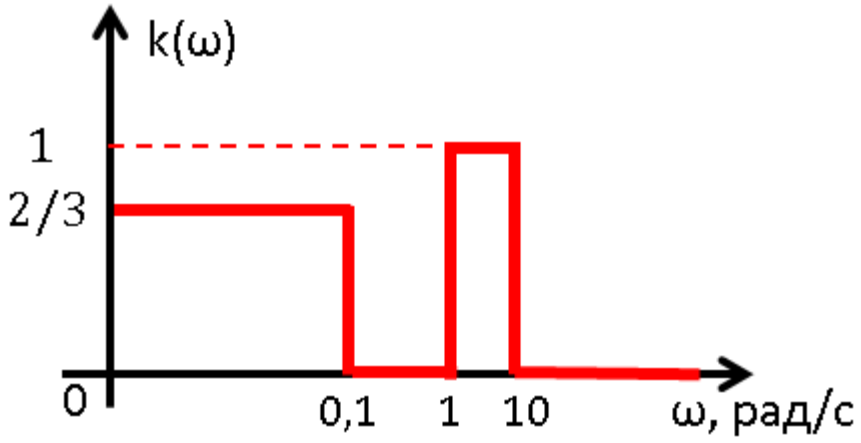
Колебание, модулированное по частоте тоном в 1 кГц и обладающее несущей частотой 10 МГц и девиацией 20 кГц, подаётся на вход расстроенного линейного резонансного усилителя с добротностью $Q_Э$ = 125 и коэффициентом усиления на резонансной частоте 200. Частота настройки контура такова, что несущая частота усиливаемого колебания совпадает с верхней граничной частотой полосы пропускания усилителя. Рассчитать амплитуду несущего колебания в спектре выходного сигнала усилителя.

Задание 4.3

Колебание, модулированное по частоте тоном в 1 кГц и обладающее несущей частотой 10 МГц и девиацией 20 кГц, подаётся на вход расстроенного линейного резонансного усилителя с добротностью $Q_Э$ = 125 и коэффициентом усиления на резонансной частоте 200. Частота настройки контура такова, что несущая частота усиливаемого колебания совпадает с нижней граничной частотой полосы пропускания усилителя. Рассчитать амплитуду несущего колебания в спектре выходного сигнала усилителя.

Задание 4.4

Рассчитайте параметры сигнала с узкополосной частотной модуляцией так, чтобы сигнал прошёл без искажений через цепь с заданной АЧХ цепи при условии, что ФЧХ цепи постоянна и равна 45°.



*Пример выполнения задания 4.1*

Решение

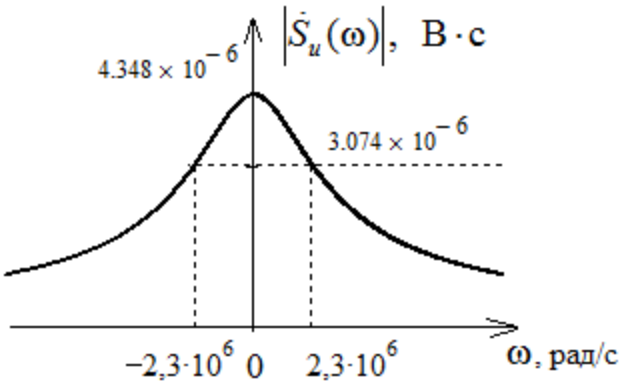
Найдем спектральную плотность экспоненциального импульса путем непосредственного применения преобразования Фурье:

$$\dot{S}_u(\omega) = \int_0^{\infty} E e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} E e^{-\alpha t - j\omega t} dt = \frac{E}{-\alpha - j\omega} e^{(-\alpha - j\omega)} \Big|_0^{\infty} = \frac{E}{\alpha + j\omega}.$$

Вычислим модуль спектральной плотности:

$$\left|\dot{S}_u(\omega)\right| = \frac{E}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}.$$

График модуля спектральной плотности экспоненциального импульса для $E = 10$ В и $\alpha = 2{,}3 \cdot 10^6$ с$^{-1}$ изображен на рисунке.



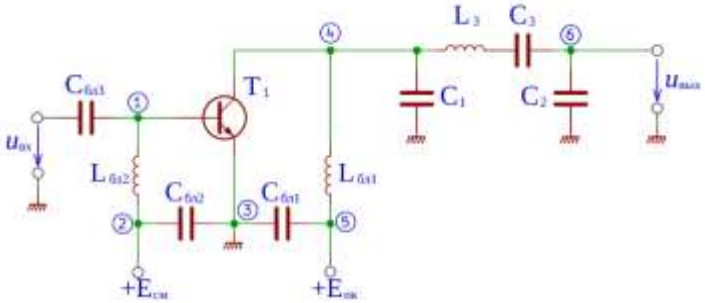
# БАНК ЗАДАНИЙ ПО СПЕЦИАЛЬНОЙ ЧАСТИ ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ В МАГИСТРАТУРУ

**Задание экзаменационного билета № 5 (5 баллов)**

Задание 5.1

Считая блокировочные элементы на приведённом рисунке транзисторного усилителя мощности (УМ) идеальными, а режим УМ - критический. Нарисуйте временную зависимость:

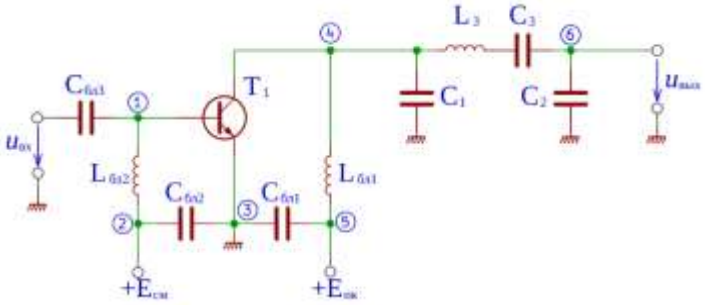
1. тока, протекающего из узла (2) в узел (1);
2. напряжение относительно шины заземления в узле (3).




Задание 5.2

Считая блокировочные элементы на приведённом рисунке транзисторного усилителя мощности (УМ) идеальными, а режим УМ - критический. Нарисуйте временную зависимость:

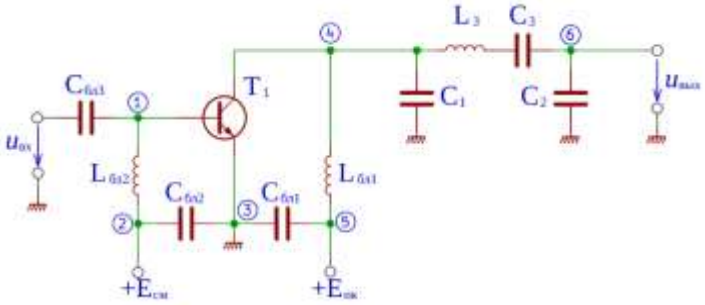
1. тока, протекающего из узла (5) в узел (4);
2. напряжение относительно шины заземления в узле (5).




Задание 5.3

Считая блокировочные элементы на приведённом рисунке транзисторного усилителя мощности (УМ) идеальными, а режим УМ - критический. Нарисуйте временную зависимость:

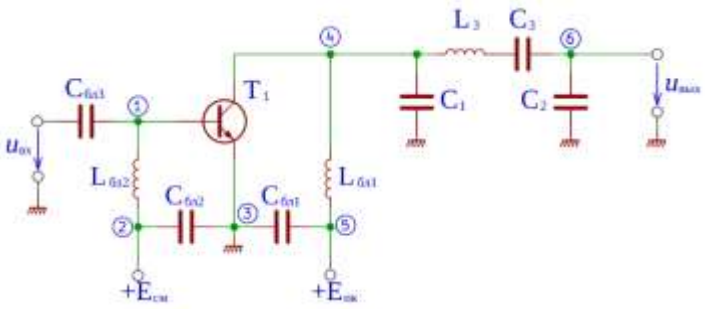
1. тока, протекающего из узла (5) в узел (3);
2. напряжение относительно шины заземления в узле (6).




Задание 5.4

Считая блокировочные элементы на приведённом рисунке транзисторного усилителя мощности (УМ) идеальными, а режим УМ - критический. Нарисуйте временную зависимость:

1. тока, протекающего из узла (1) в узел (2);
2. напряжение относительно шины заземления в узле (2).




**Задание экзаменационного билета № 6 (5 баллов)**

Задание 6.1
Изобразите структурную схему супергетеродинного радиоприемника, поясните назначение каждого блока. Запишите выражение, определяющее частоту зеркального канала. Какой блок обеспечивает ослабление помехи по зеркальному каналу? Как повысить избирательность приёмника по зеркальному каналу?

Задание 6.2
Дайте определение коэффициента шума. Получите выражение для коэффициента шума трех каскадно-соединённых четырёхполюсников (каскадов РПУ).

Задание 6.3
Изобразите структурную схему супергетеродинного радиоприемника. Поясните назначение входной цепи. Запишите условие согласования с антенной. Выведите выражений для коэффициентов включения, коэффициента передачи и полосы пропускания в режиме максимальной передачи без ограничения на расширение полосы пропускания.

Задание 6.4
Изобразите структурную схему супергетеродинного радиоприемника. Поясните назначение входной цепи. Запишите условие согласования с антенной. Выведите выражения для коэффициентов включения, коэффициента передачи и полосы пропускания в режиме максимальной передачи с заданной полосой пропускания.

Задание 6.5
Изобразите структурную схему супергетеродинного радиоприемника. Поясните назначение УРЧ. Дайте определение устойчивого режима работы каскада УРЧ - причина внутренней обратной связи, понятие устойчивой работы каскада, коэффициент устойчивости, коэффициент устойчивого усиления, предельный коэффициент усиления, при котором наступает самовозбуждение.

Задание 6.6
Изобразите структурную схему супергетеродинного радиоприемника. Поясните назначение ПЧ. Изобразите схему двойного балансного преобразователя частоты. Поясните принцип его работы.

Задание 6.7
Изобразите структурную схему супергетеродинного радиоприемника. Поясните назначение ПЧ. Изобразите схему транзисторного преобразователя частоты. Поясните принцип его работы.

Задание 6.8
Изобразите структурную схему супергетеродинного радиоприемника. Поясните назначение УПЧ. Усилитель промежуточной частоты с распределённым усилением: структура, коэффициент усиления и АЧХ УПЧ с идентичными каскадами на одиночных колебательных контурах. Как изменяется полоса пропускания УПЧ при увеличении числа каскадов?

Задание 6.9
Изобразите структурную схему супергетеродинного радиоприемника. Поясните назначение УПЧ. Укажите и поясните основные причины возникновения линейных и нелинейных искажений на выходе УПЧ.

Задание 6.10
Изобразите структурную схему супергетеродинного радиоприемника. Поясните назначение демодулятора. Изобразите схему фазового демодулятора векторомерного типа, поясните принцип его работы. Изобразите и поясните детекторную характеристику такого демодулятора.

Задание 6.11
Изобразите структурную схему супергетеродинного радиоприемника. Поясните назначение демодулятора. Дайте определение детекторной характеристики АД. Изобразите схему последовательного амплитудного демодулятора (АД), поясните принцип его работы, изобразите его детекторную характеристику. Поясните основные причины возникновения искажений на выходе такого АД.

## БАНК ЗАДАНИЙ ПО СПЕЦИАЛЬНОЙ ЧАСТИ ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ В МАГИСТРАТУРУ
## по профилю радиотехнические системы

**Задание экзаменационного билета № 7 (20 баллов)**

Задание 7.1
Изобразите электрическую принципиальную схему однотактного диодного смесителя при условии использования в качестве гетеродина емкостной трёхточки (схема Клаппа) на n-p-n биполярном транзисторе (БТ) с двумя источниками постоянного напряжения, емкостной связью с нагрузкой и заземлённым коллектором БТ по ВЧ току (базовое и эмиттерное автосмещения). Определить коэффициенты обратной связи, включения контура в цепь и резонансную частоту контура гетеродина $f_г$. Изобразить спектр колебания на выходе смесителя при условии подачи на его вход моногармонического сигнала с частотой $f_с$.

Задание 7.2
Изобразите электрическую принципиальную схему балансного диодного смесителя при условии использования в качестве гетеродина емкостной трёхточки (схема Клаппа) на p-n-p биполярном транзисторе (БТ) с двумя источниками постоянного напряжения, емкостной связью с нагрузкой и заземлённым эмиттером БТ по ВЧ току (базовое автосмещение). Определить коэффициенты обратной связи, включения контура в цепь и резонансную частоту контура гетеродина $f_г$. Изобразить спектр колебания на выходе смесителя при условии подачи на его вход моногармонического сигнала с частотой $f_с$.

Задание 7.3
Изобразите электрическую принципиальную схему кольцевого диодного смесителя при условии использования в качестве гетеродина индуктивной трёхточки (схема Хартли) на n-p-n биполярном транзисторе (БТ) с одним источником постоянного напряжения, трансформаторной связью с нагрузкой и заземлённым эмиттером БТ по ВЧ току (базовое автосмещение). Изобразить спектр колебания на выходе смесителя при условии подачи на его вход моногармонического сигнала с частотой $f_c$.

Задание 7.4
Изобразите электрическую принципиальную схему транзисторного смесителя при условии использования в качестве гетеродина индуктивной трёхточки (схема Хартли) на p-n-p биполярном транзисторе (БТ) с одним источником постоянного напряжения, емкостной связью с нагрузкой и заземлённой базой БТ по ВЧ току (базовое автосмещение). Определить коэффициенты обратной связи, включения контура в цепь и резонансную частоту контура гетеродина $f_г$. Изобразить спектр колебания на выходе смесителя при условии подачи на его вход моногармонического сигнала с частотой $f_c$.

**Задание экзаменационного билета № 8 (15 баллов)**

Задание 8.1
Радиоприемник с коэффициентом шума, равным 7, работает от антенны с шумовой температурой 1850 К. Требуется повысить чувствительность приемника не менее чем в два раза. Можно ли это сделать, снизив коэффициент шума? Ответ обоснуйте численно.

Задание 8.2
Радиоприемник с коэффициентом шума, равным 7, работает от антенны с шумовой температурой 1750 К. Требуется повысить чувствительность приемника не менее чем в два раза. Можно ли это сделать, снизив коэффициент шума? Ответ обоснуйте численно.

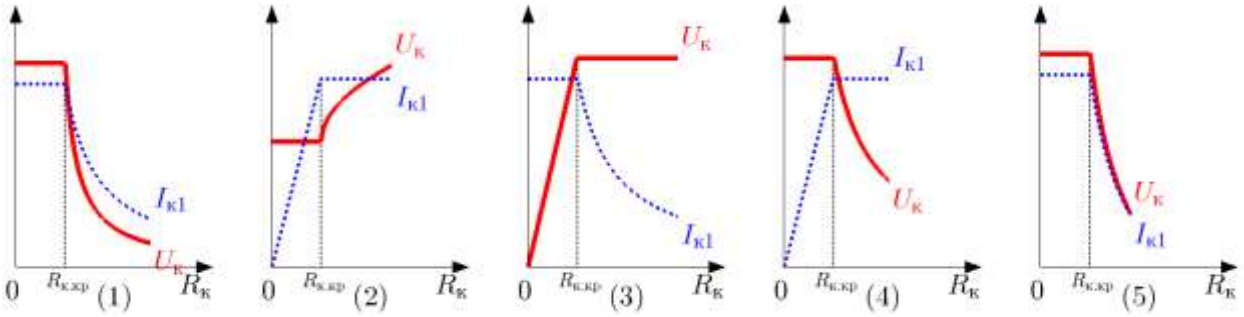
Задание 8.3
БВЧ РПУ включает ВЦ и ПЧ. Шумовая температура ПЧ 1200 К. Можно ли улучшить чувствительность РПУ, введя в его состав дополнительно каскад УРЧ, имеющую шумовую температуру 500 К и коэффициент усиления номинальной мощности $К_{р\ ном}$ = 2? Ответ обоснуйте численно.

Задание 8.4
БВЧ РПУ включает ВЦ и ПЧ. Шумовая температура ПЧ 1100 К. Можно ли улучшить чувствительность РПУ, введя в его состав дополнительно каскад УРЧ, имеющую шумовую температуру 600 К и коэффициент усиления номинальной мощности $К_{р\ ном}$ = 2? Ответ обоснуйте численно.

**Задание экзаменационного билета № 9 (15 баллов)**

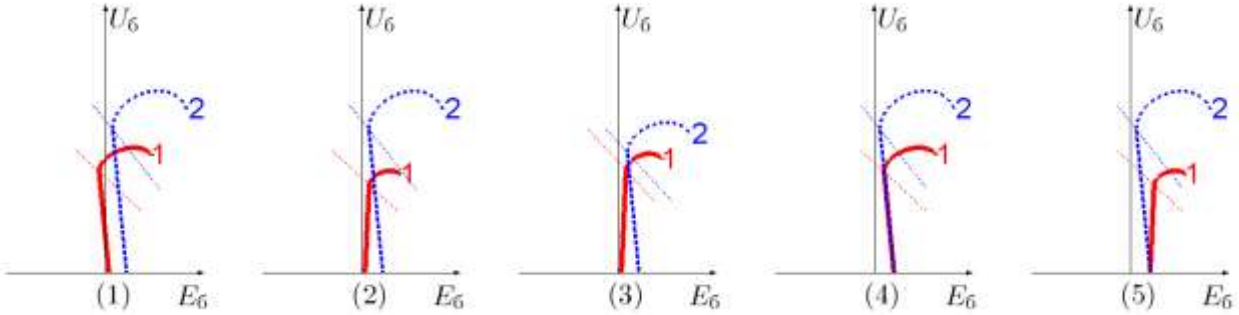
Задание 9.1

Определите и объясните правильный вариант идеализированных нагрузочных характеристик – амплитуды первой гармоники коллекторного тока ($I_{к1}$) и амплитуды напряжения на коллекторе ($U_к$) от сопротивления коллектора ($R_к$) транзисторного усилителя мощности, если напряжения смещения ($E_{см}$), напряжение питания коллектора ($E_к$) и амплитуда входного напряжения ($U_в$) постоянны.



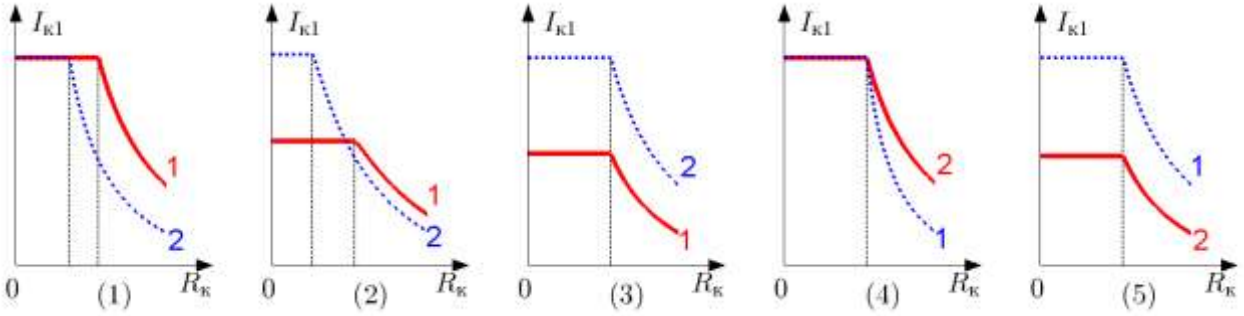

Задание 9.2

Укажите правильный вариант диаграмм срыва транзисторного автогенератора при двух значениях коэффициента обратной связи ($k$), при постоянстве $SR_у$, $E'$ и $S$. Поясните свой выбор.



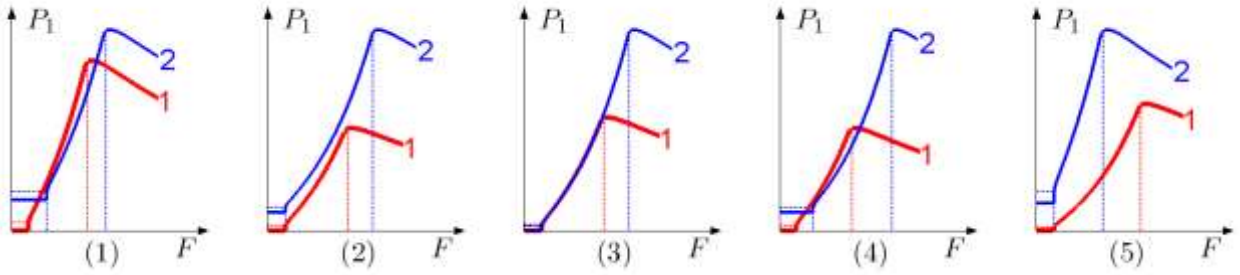

Задание 9.3

Определите и объясните правильный вариант идеализированных нагрузочных характеристик амплитуды первой гармоники тока ($I_{к1}$) от сопротивления коллектора ($R_к$) транзисторного усилителя мощности при двух значениях напряжениях смещения ($E_{см}$), где $E_{см1} < E_{см2}$, если амплитуда входного тока ($I_{вх}$) постоянна.



Задание 9.4

Укажите правильный вариант нагрузочных характеристик - зависимость мощности первой гармоники сигнала ($P_1$) от фактора регенерации ($F$) транзисторного автогенератора при двух значениях напряжения питания коллектора ($E_к$), где $E_{к1} < E_{к2}$, при постоянстве сопротивления базового автосмещения ($R_б$), коэффициента обратной связи ($k$) и напряжения смещения ($E_{см}$). Поясните свой выбор.



# БАНК ЗАДАНИЙ ПО СПЕЦИАЛЬНОЙ ЧАСТИ ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ В МАГИСТРАТУРУ
## по профилю Квантовые вычисления и коммуникации

**Задание экзаменационного билета № 7 (20 баллов)**

***Тема: Общая физика***

Задание 7.1
Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью 20 м/с. Определите максимальную высоту подъема и время, через которое тело вернется на землю. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Задание 7.2
На гладкой горизонтальной поверхности лежит блок массой 10 кг. К блоку приложена горизонтальная сила 50 Н. Найдите ускорение блока.

Задание 7.3
Шарик массой 2 кг движется по окружности радиусом 3 м с постоянной скоростью 4 м/с. Найдите центростремительное ускорение и силу, действующую на шарик.

Задание 7.4
Заряд q = 2 мкКл равномерно распределен на сфере радиусом R = 10 см. Найдите напряженность электрического поля на расстоянии 20 см от центра сферы.

Задание 7.5
В проводнике сопротивлением 5 Ом протекает ток 3 А. Найдите выделяемую мощность.

Задание 7.6
Плоский конденсатор имеет емкость 10 мкФ и подключен к напряжению 200 В. Найдите энергию, запасенную в конденсаторе.

Задание 7.7
Электрон влетает в однородное магнитное поле с индукцией B = 0.01 Тл перпендикулярно линиям поля со скоростью $10^6$ м/с. Найдите радиус траектории электрона.

Задание 7.8
Медный проводник длиной 10 м и площадью поперечного сечения 2 мм² имеет удельное сопротивление $\rho = 1.7 * 10^{-8}$ Ом·м. Найдите сопротивление проводника.

*Пример выполнения задания 7.1*
Максимальная высота определяется условием v = 0. Используем уравнение $v = v_0 - gt$, где g = 9.8 м/с². v = 0 => $t = v_0 / g = 20 / 9.8 \approx 2.04$ с.
Максимальная высота: $h = v_0t - 0.5gt^2 = 20 * 2.04 - 0.5 * 9.8 * (2.04)^2 \approx 20.4$ м.
Общее время движения: $T = 2t \approx 4.08$ с.

**Задание экзаменационного билета № 8 (15 баллов)**

***Тема: Квантовая механика***

Задание 8.1
Частица находится в основном состоянии в одномерной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками шириной L=1 нм. Найдите вероятность нахождения частицы в интервале от x=0 до x=L/4.

Задание 8.2
Частица в основном состоянии в одномерной потенциальной яме шириной L=2 нм. Найдите среднее значение координаты ⟨x⟩.

Задание 8.3
Частица в основном состоянии в одномерной потенциальной яме шириной L=1 нм. Найдите среднее значение квадрата координаты $\langle x^2 \rangle$.

Задание 8.4
Частица в основном состоянии в одномерной потенциальной яме шириной L=1 нм. Найдите вероятность нахождения частицы в интервале от x=L/4 до x=3L/4.

Задание 8.5
Частица в основном состоянии в одномерной потенциальной яме шириной L=1 нм. Найдите энергию основного состояния.

Задание 8.6
Частица в основном состоянии в одномерной потенциальной яме шириной L=1 нм. Найдите вероятность нахождения частицы в интервале от x=L/2 до x=L.

Задание 8.7
Частица в основном состоянии в одномерной потенциальной яме шириной L=2 нм. Найдите вероятность нахождения частицы в интервале от x=L/2 до x=L.

Задание 8.8
Частица в основном состоянии в одномерной потенциальной яме шириной L=4 нм. Найдите среднее значение координаты ⟨x⟩.

*Пример выполнения задания 8.1*
Волновая функция основного состояния

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right).$$

Вероятность:

$$P = \int_0^{L/4} \left|\psi_1(x)\right|^2 dx = \frac{2}{L}\int_0^{L/4} \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{L}\int_0^{L/4} \frac{1-\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)}{2} dx = \frac{1}{L}\left(\frac{L}{4} - \frac{L}{2\pi}\right) \approx 0.0908$$

**Задание экзаменационного билета № 9 (15 баллов)**

***Тема: Линейная алгебра***

Задание 9.1
Решить систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8. \end{cases}$$

Задание 9.2
Решить систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 2, \\ 7x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 5. \end{cases}$$

Задание 9.3
Решить систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 8. \end{cases}$$

Задание 9.4
Решить систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 8. \end{cases}$$

Задание 9.5
Решить систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4. \end{cases}$$

Задание 9.6
Решить систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 2. \end{cases}$$

Задание 9.7
Решить систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$$

Задание 9.8

Решить систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

*Пример выполнения задания 9.1*

Напишем основную матрицу системы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

и еще три матрицы $A_1, A_2, A_3$, каждая из которых получена из матрицы $A$ заменой соответствующего столбца столбцом свободных членов:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Найдем определители всех четырех матриц:

$$\Delta = 33, \Delta_1 = 33, \Delta_2 = 33, \Delta_3 = 33.$$

Так как определитель $\Delta$ основной матрицы системы $A$ отличен от нуля, то система имеет единственное решение. Находим его по правилу Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1,\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1,\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 1.$$

Сделаем проверку, подставив $x_1 = 1,\ \ x_2 = 1,\ x_3 = 1,$ во все уравнения системы.

***Тема: Линейная алгебра***

Задание 9.9

Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\hat{A}$, заданного в некотором базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задание 9.10

Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\hat{A}$, заданного в некотором базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задание 9.11

Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\hat{A}$, заданного в некотором базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задание 9.12

Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\hat{A}$, заданного в некотором базисе матрицей

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Задание 9.13

Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\hat{A}$, заданного в некотором базисе матрицей

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Задание 9.14

Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\hat{A}$, заданного в некотором базисе матрицей

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Задание 9.15

Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\hat{A}$, заданного в некотором базисе матрицей

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Задание 9.16

Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\hat{A}$, заданного в некотором базисе матрицей

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

*Пример выполнения задания 9.9*

Составим характеристическое уравнение $\det(A-\lambda E)=0$:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix}=0 \to (3-\lambda)\left(\lambda^2-4\lambda+3\right)=0.$$

Отсюда $\lambda_{1,2}=3,\ \ \lambda_3=1.$

Для собственного значения $\lambda_{1,2}=3$ найдем собственные векторы. Для этого решаем однородную систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} x_1-x_2-x_3=0, \\ x_1-x_2-x_3=0. \end{cases}$$

Очевидно, что ранг матрицы этой системы равен 1, следовательно система нетривиально совместна и ее фундаментальная система

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, двухкратному собственному значению $\lambda = 3$ соответствуют два линейно независимых собственных вектора $e_1 = \{1,1,0\}$ и $e_2 = \{1,0,1\}$. Множество всех собственных векторов $S_{\lambda=3}$, соответствующих собственному значению $\lambda = 3$, - это множество всех ненулевых решений однородной системы уравнений $(A - 3E)X = 0$:

$$S_{\lambda=3} = \{x : x = C_1 e_1 + C_2 e_2,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R},\ C_1^2 + C_2^2 \neq 0\}.$$

Аналогично находим собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda = 1$: $e_3 = \{0,1,1\}$, следовательно,

$$S_{\lambda=1} = \{x : x = C_3 e_3,\ C_3 \in \mathbb{R},\ C_3 \neq 0\}.$$

***Тема: Линейная алгебра***

Задание 9.17
Решить задачу Коши для дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' + y' - 6y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = -1.$$

Задание 9.18
Решить задачу Коши для дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' + y' - 6y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = -1.$$

Задание 9.19
Решить задачу Коши для дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' - 5y' + 6y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$$

Задание 9.20
Решить задачу Коши для дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' + 4y' + 4y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$$

Задание 9.21
Решить задачу Коши для дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' - 4y = 0,\ y(0) = 3,\ y'(0) = 0.$$

Задание 9.22
Решить задачу Коши для дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' + 2y' + 5y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1.$$

Задание 9.23
Решить задачу Коши для дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' - 2y' + y = 0,\ y(0) = 4,\ y'(0) = -2.$$

Задание 9.24
Решить задачу Коши для дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' + 9y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 3.$$

*Пример выполнения задания 9.17*
Составим характеристическое уравнение:
$r^2 + r - 6 = 0$.
Решим это квадратное уравнение. Найдем корни:
$r_1 = 2$, $r_2 = -3$.
Общее решение дифференциального уравнения имеет вид:
$y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-3x}$.
Используем начальные условия $y(0) = 2$ и $y'(0) = -1$, чтобы найти $C_1$ и $C_2$.
Подставим $y(0) = 2$:
$y(0) = C_1e^0 + C_2e^0 = C_1 + C_2 = 2$.

Найдем производную общего решения:
$y'(x) = 2C_1e^{2x} - 3C_2e^{-3x}$.
Подставим $y'(0) = -1$:
$y'(0) = 2C_1 - 3C_2 = -1$.
Решим систему уравнений:
$C_1 + C_2 = 2$,
$2C_1 - 3C_2 = -1$.
Из первого уравнения выразим $C_1$:
$C_1 = 2 - C_2$.
Подставим во второе уравнение:
$2(2 - C_2) - 3C_2 = -1$.
$4 - 2C_2 - 3C_2 = -1$.
$-5C_2 = -5$, отсюда $C_2 = 1$.
Найдем $C_1$:
$C_1 = 2 - 1 = 1$.
Подставим найденные значения $C_1$ и $C_2$ в общее решение:
$y(x) = e^{2x} + e^{-3x}$.

Директор ИРЭ _____ / Р.С. Куликов /

Разработчик к.т.н. доцент _____ / М.С. Михайлов /